Zusammenfassung Elektronik – Informationsgehalt und Renundanz

Alphabete: $A = \{A_i \mid i = 1 \ldots N\}$

N ist die Anzahl der unterscheidbaren Zeichen

Informationsvorrat Q: $Q = N^L$

Informationsvorrat = Anzahl der Zeichen hoch Wortlänge
Beispiel: Dezaimlzahlensystem mit Wortlänge 3:
$N = 10$, $L = 3$ $Q = 10^3$

Wortlänge L:
(bei *fester* Wortlänge)

$L = \log_b N$

Wortlänge = Logarithmus der Basis zur Anzahl der Zeichen
Beispiel: Binärcodierung eines Zeichensatzes mit 50 Zeichen
$B = 2$, $N = 50$ $L = \log_2 50 = 5{,}64$ → Wortlänge ist 6 Zeichen

Alphabete als „endliches Schema" (= Wahrscheinlichkeitsfeld):

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_N \\ P(A_1) & P(A_2) & P(A_3) & \ldots & P(A_N) \end{pmatrix}$$

A = Zeichen, P(Ai) = Autretenswahrscheinlichkeit des Zeichens

$$\sum = P(A_i) = 1 \quad (100\%)$$

Summe aller einzelnen Wahrscheinlichkeiten ergibt 1

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}5 & 0{,}125 \end{pmatrix}$

$0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}5 + 0{,}125 = 1$

Informationsgehalt H:

$$H(A_i) = \mathrm{ld}\ \frac{1}{P(A_i)}$$

Informationsgehalt H eines Zeichens = Zweier-Logarithmus von Eins durch die Wahrscheinlichkeit des Zeichens
Beipiel:
$H(A) = \mathrm{ld}\ 1/0{,}25 = \mathrm{ld}\ 4 = \mathrm{ld}\ 2^2 = 2$ bit (d.h. ich brauche zwei Binärstellen, um das Zeichen A in der datenquelle zu codieren!)
$H(B) = \mathrm{ld}\ 1/0{,}125 = \mathrm{ld}\ 8 = \mathrm{ld}\ 2^3 = 3$ bit
$H(C) = \mathrm{ld}\ 1/0{,}5 = \mathrm{ld}\ 2 = \mathrm{ld}\ 2^1 = 1$ bit

Mittlerer Informationsgehalt = Entropie

$$H(\mathbf{A}) = \sum P(A_i) * H(A_i)$$

Mittlerer Informationsgehalt = Summe aus allen einzelnen Wahrscheinlichkeiten mal alle einzelnen Informationsgehalte
Beispiel:
$H(\mathbf{A}) = P(A)*H(A) + P(B)*H(B) + P(C)*H(C) + P(D)*H(D)$
$= 0{,}25 * 2 + 0125 * 3 + 0{,}5 + 1 + 0{,}125 * 3$
$= ½ + 3/8 + ½ + 3/8 = 1{,}75$ bit

→ Man sollte nach einer Codierung suchen, die 1,75 bit nicht wesentlich überschreitet. In diesem Falle wäre das eine Codierung mit 2 Binärstellen pro Zeichen:

Zeichen:	A	B	C	D	
Code 1:	00	01	10	11	
Alternativer Code 2:	01	001	1	000	(Codierung nach $H(A_i)$)

Wenn alle Zeichen gleich wahrscheinlich sind (= Datenquelle hat maximale Entropie), dann gilt: $H(\mathbf{A}) = H(A_i) = \mathrm{ld}\ N$
Beispiel: Datenquelle mit 64 Zeichen und maximaler Entropie:
$H(\mathbf{A}) = \mathrm{ld}\ 64 \rightarrow 2^6 = 64 \rightarrow H(\mathbf{A}) = H(A_i) = 6$ bit

Mittlere Wortlänge:

$$L_m = \sum P(A_i) * L(A_i)$$

Mittlere Wortlänge = Summe aus allen einzelnen Wahrscheinlichkeiten mal alle einzelnen Wortlängen
Beipiel:
$L_m = 0{,}25 * 2 + 0{,}125 * 3 + 0{,}5 * 1 + 0{,}125 * 3 = 1{,}75$

Renundanz R (= ungenutzter Informationsgehalt):

$$R = L - H(\mathbf{A})$$

Renundanz = Mittlere Wortlänge minus Mittlerer Informationsgehalt
Beispiel: R = 2 - 1,75 = 0,25 bit Renundanz pro Zeichen bei Code 1
R = 1,75 - 1,75 = 0 bit Renundanz pro Zeichen bei Code 2

Wann tritt Renundanz 0 auf?

- Wenn das Auftreten aller Zeichen gleich wahrscheinlich ist:
  $P(A_i) = \frac{1}{N}$ N = Anzahl der Zeichen
  Beispiel: N = 4 → P(Ai) = ¼
- Wenn die Wortlänge der Potenz b des Zeichens entspricht:
  L = b b = zur Codierung benötigte bit
  Beispiel: H(B) = 3 bit Codierung: B = 001
  Renundanz R: Länge 3 - Informationsgehalt 3 = 0
- Wenn

Der „schnelle Informationsgehalt“:

$H(A_i) = \mathrm{ld}\ \frac{1}{P(A_i)}$ Beispiel: P(B) = 1/8 $H(Ai) = \mathrm{ld}\ \frac{1}{1/8} = \mathrm{ld}\ 8 = 3$

Schneller: Nimm Wahrscheinlichkeit des Zeichens: 1/8
Davon Kehrwert: 8
Davon ld: $2^3 = 8 \rightarrow \mathrm{ld}\ 8 = 3$